МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20 май 2024 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от дадените уравнения е на права, сключваща тъп ъгъл с положителната посока на абсцисната ос?

А) $y=-2$

Б) $x=2$

В) $y=-2x+1$

Г) $y=2x-1$

2. Ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията $f(x)=-x^3+2x+1$ в точката A с абсциса $x_A=-1$ е:

А) -5

Б) -1

В) 1

Г) 5

3. Едночленът от шеста степен в нормалния вид на $(x-1)^7$ е:

А) $-21x^6$

Б) $-7x^6$

В) $7x^6$

Г) $21x^6$

4. От три еднакво големи партиди изделия е избрано едно изделие за контрол на продукцията. Каква е вероятността това изделие да е бракувано, ако в една от партидите $\frac{2}{3}$ от изделията са бракувани, в друга $\frac{1}{5}$ са бракувани и в третата има само висококачествени изделия?

А) $\frac{13}{45}$ Б) $\frac{13}{15}$ В) $\frac{2}{3}$ Г) $\frac{2}{9}$

5. Коя от изброените функции притежава една хоризонтална и две вертикални асимптоти?

А) $y=\frac{x^2-1}{2x+3}$

Б) $y=\frac{2x+3}{x^2-1}$

В) $y=\frac{2x^4+3}{x^2-1}$

Г) $y=\frac{x^2-1}{2x^4+3}$

6. Стойността на реалното число k, за което векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координати $\vec{a}(2k;-1)$ и $\vec{b}(-3;-6)$ са взаимно перпендикулярни, е равна на:

А) $k=-1$ Б) $k=-0,25$ В) $k=0$ Г) $k=1$

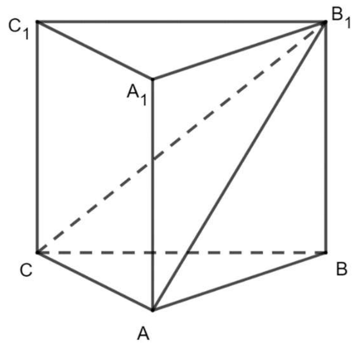
7. Първият член на безкрайно намаляваща геометрична прогресия е 2. Ако всеки следващ член на прогресията е три пъти по-малък от сбора на съседните му два члена, то сумата от членовете на прогресията е равна на:

А) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Б) $1+\sqrt{5}$ В) $1-\sqrt{5}$ Г) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

8. Тяло се движи по закона $S(t)=2t^2-4t+2$ (в метри), където t е времето, измерено в секунди. Скоростта на тялото в определен момент t_1 е $V(t_1)=8\text{ m/s}$. Стойността на t_1 в секунди е:

А) $t_1=1$ Б) $t_1=3$ В) $t_1=6$ Г) $t_1=2,5$

9. Основният ръб на правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ е равен на $2\ \text{cm}$, а диагоналът на околна стена е $\sqrt{5}\ \text{cm}$. Ъгълът между равнината (ABC) и равнината (ACB_1) е:



А) 30°

Б) 45°

В) 60°

Г) 90°

10. Дадена е окръжност с уравнение $(x-2)^2+(y-1)^2=13$. Точка O е център на окръжността, а A и B са пресечните точки на правата $g: x+y-4=0$ с окръжността. Колко от точките A, B и O лежат на правата с уравнение $l: 3x+2y-8=0$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

11. Дадена е функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-3}, \text{ ако } x<2\\ a, \text{ ако } x\geq 2\end{cases}$, където a е реален параметър. Стойността на a, за която функцията е непрекъсната в $x=2$, е:

А) 9 Б) $\dfrac{7}{2}$ В) $-\dfrac{7}{2}$ Г) -9

12. Намерете границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)^2}{3x^4}$.

А) $\dfrac{4}{3}$ Б) $\dfrac{1}{12}$ В) $\dfrac{1}{48}$ Г) 0

13. Абсцисата на инфлексната точка за функцията $f\left(x\right)=x.e^{-x}$ е равна на:

А) -1 Б) 1 В) -2 Г) 2

14. Ако в правилна триъгълна призма с основен ръб $6\sqrt{3}$ cm може да се впише сфера, то дължината на околния ѝ ръб е:

А) 3 cm Б) $3\sqrt{3}$ cm В) 6 cm Г) $6\sqrt{3}$ cm

15. При паркиране на автомобили на платен паркинг се пускат монети в машина. Устройството отхвърля дадена монета с вероятност $0,05$. Пускаме 2 монети в машината. Намерете вероятността поне едната от тях да бъде приета от устройството.

А) $0,95$ Б) $0,9025$ В) $0,92$ Г) $0,9975$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20 май 2024 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. Дадени са полиномите $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ **и** $Q(x) = -2x^3 + 9x^2 + ax + b = 0$ **Най-малкият корен на уравнението** $P(x) = 0$ **е корен и на уравнението** $Q(x) = 0$**, а остатъкът от делението на** $Q(x)$ **с двучлена** $G(x) = x + 1$ **е равен на** 10**.**

а) Намерете стойностите на коефициентите a **и** b**, и разложете** $P(x)$ **и** $Q(x)$.

б) Решете неравенството $P(x).Q(x) > 0$**.**

17. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ **за** $x \in \left(-\infty; +\infty\right)$**. Да се намерят:**

а) интервалите на растене и намаляване и локалните екстремуми на функцията;

б) най-малката и най-голямата стойност на функцията в интервала $\left[-3; 5\right]$**;**

в) интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията.

18. **Правоъгълният триъгълник** $ABC(\sphericalangle C = 90^\circ)$ **с катети** $AC = 2\sqrt{2}$ cm **и** $BC = 4$ cm **служи за основа на пирамида** $ABCD$**, на която околният ръб** $DC = 4$ cm **и** $DC \perp (ABC)$**. Точка** $M \in DC$ **е такава, че** $DM : MC = 1 : 3$**. През точка** A **и точка** M **е построена равнина** γ**, успоредна на правата** CB**, която пресича ръба** DB **в точка** N **.**

а) Докажете, че полученото сечение е правоъгълен триъгълник и намерете лицето му.

б) Намерете разстоянието между кръстосаните прави AN **и** DC **.**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20 май 2024 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	В	3
2.	Б	3
3.	Б	3
4.	А	3
5.	Б	3
6.	Г	4
7.	Б	4
8.	Б	4
9.	А	4
10.	В	4
11.	А	4
12.	Б	4
13.	Г	4
14.	В	4
15.	Г	4
16.	а) $a=-3$, $b=-4$ $P(x)=(x-1)(x-3)^2$ $Q(x)=-(x-1)(2x+1)(x-4)$ б) $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;3)\cup(3;4)$	15

17.	а) $f(x)$ е растяща за $x \in (-2;2)$ $f(x)$ е намаляваща за $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ $f_{\min}(x) = f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f_{\max}(x) = f(2) = \frac{1}{4}$ б) НМС: $f(-2) = -\frac{1}{4}$, НГС: $f(2) = \frac{1}{4}$ в) $f(x)$ е изпъкнала за $x \in \left(-2\sqrt{3};0\right) \cup \left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ $f(x)$ е вдлъбната за $x \in \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right) \cup \left(0;2\sqrt{3}\right)$ Инфлексни точки: $M_1\left(-2\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $M_2(0;0)$ и $M_3\left(2\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.	15
18.	а) $S = \frac{\sqrt{17}}{2}$ cm^2 б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm	15

Задача 16.

Решение:

а) Със схемата на Хорнер се установява, че корените на $P(x) = 0$ са $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 3$.

Тогава $Q(1) = a + b + 7 \Rightarrow a + b + 7 = 0$ и $Q(-1) = b - a + 11 \Rightarrow b - a + 11 = 10$.

Решаване на системата $\begin{vmatrix} a + b + 7 = 0 \\ b - a + 11 = 10 \end{vmatrix}$, откъдето се получава $a = -3$, $b = -4$.

Тогава $Q(x) = -2x^3 + 9x^2 - 3x - 4$.

Със схемата на Хорнер се намира, че другите два корена на $Q(x) = 0$ са $-\frac{1}{2}$ и 4.

Тогава $P(x) = (x-1)(x-3)^2$ и $Q(x) = -(x-1)(2x+1)(x-4)$.

б) Неравенството е във вида: $-(x-1)^2(x-3)^2(2x+1)(x-4)>0$.

С метода на интервалите се намират решенията $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;3)\cup(3;4)$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $a=-3$, $b=-4$	8 точки
$P(x)=(x-1)(x-3)^2$ и $Q(x)=-(x-1)(2x+1)(x-4)$.	3 точки
б) $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(1;3)\cup(3;4)$	4 точки

Задача 17.

Решение:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}\quad x\in(-\infty;+\infty)$

Намиране $f'(x)=\dfrac{x^2+4-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow=-x^2+4=0$ с корени $x_{1/2}=\pm 2$

За $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$: $f'(x)<0$, т.е. $f(x)$ е намаляваща.

За $x\in(-2;2)$: $f'(x)>0$, т.е. $f(x)$ е растяща.

Тъй като за $x\in(-\infty;-2)$ $f(x)$ е намаляваща, а за $x\in(-2;2)$ $f(x)$ е растяща, то за $x=-2$ $f(x)$ има локален минимум и $f_{\min}(x)=f(-2)=-\frac{1}{4}$.

Тъй като за $x\in(-2;2)$ $f(x)$ е растяща, а за $x\in(2;+\infty)$ $f(x)$ е намаляваща, то за $x=2$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}(x)=f(2)=\frac{1}{4}$.

б) Тъй като точките, в които функцията $f(x)$ има локални екстремуми, принадлежат на интервала $[-3;5]$ и $f(-3)=-\frac{3}{13}$, $f(5)=\frac{5}{29}$, то се получава, че:

НМС $f(x) = \min\limits_{x\in[-3;5]}\left\{f(-3), f(-2), f(5)\right\} = f(-2) = -\frac{1}{4}$ и

НГС $f(x) = \max\limits_{x\in[-3;5]}\left\{f(-3), f(2), f(5)\right\} = f(2) = \frac{1}{4}$

в) $f''(x) = \frac{-2x\left(x^2+4\right)^2 - 4x\left(x^2+4\right)\left(-x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4} = \frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\left(x^2-12\right) = 0$ т.е. $x_1 = 0$ и $x_{2/3} = \pm 2\sqrt{3}$

За $x \in \left(-2\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$: $f''(x) > 0$, т.е. $f(x)$ е изпъкнала.

За $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0; 2\sqrt{3}\right)$: $f''(x) < 0$, т.е. $f(x)$ е вдлъбната.

Инфлексните точки са $M_1\left(-2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $M_2(0;0)$ и $M_3\left(2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $f(x)$ е растяща за $x \in (-2; 2)$ $f(x)$ е намаляваща за $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	3,5 точки
$f_{\min}(x) = f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f_{\max}(x) = f(2) = \frac{1}{4}$	4 точки
б) НМС: $f(-2) = -\frac{1}{4}$, НГС: $f(2) = \frac{1}{4}$	3 точки
в) $f(x)$ е изпъкнала за $x \in \left(-2\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$ $f(x)$ е вдлъбната за $x \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0; 2\sqrt{3}\right)$	3,5 точки
Инфлексни точки: $M_1\left(-2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $M_2(0;0)$ и $M_3\left(2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.	1 точка

Задача 18.

Решение:

а) Равнината $\gamma \parallel CB$, $CB \subset (BCD)$ $\Rightarrow$ γ пресича равнината (BCD) в права, успоредна на CB $\Rightarrow$ $MN \parallel CB$.

Полученото сечение е $\triangle AMN$.

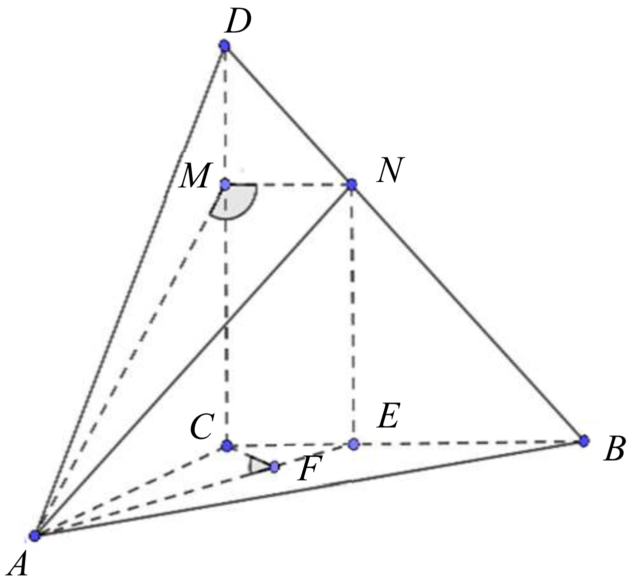
$AC \perp CB$, AC е ортогоналната проекция на AM върху равнината на основата и от теоремата за трите перпендикуляра следва, че: $AM \perp CB$ $\Rightarrow$ $AM \perp MN$ $\Rightarrow$ $\triangle AMN$ е правоъгълен.

От $DM : MC = 1:3$ $\Rightarrow$ $DM = 1$ cm, $MC = 3$ cm

От $\triangle DMN \sim \triangle DCB$ $\Rightarrow$ $MN = 1$ cm

От Питагорова теорема за $\triangle ACM$ $\Rightarrow$ $AM^2 = AC^2 + MC^2$ $\Rightarrow$ $AM = \sqrt{17}$ cm

$S_{\triangle AMN} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ cm^2



б) Нека точка E е ортогоналната проекция на точка N върху равнината на основата $(E \in CB)$.

AE е ортогоналната проекция на AN в (ABC).

Нека $CF \perp AE$ $(F \in AE)$.

От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $CF \perp AN$.

$DC \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $DC \perp CF$ $\Rightarrow$ търсеното разстояние е CF.

CF е височина в правоъгълния $\triangle ACE$.

$MNEC$ е правоъгълник $\Rightarrow$ $CE = MN = 1$ cm

От Питагорова теорема за $\triangle ACE$ $\Rightarrow$ $AE^2 = AC^2 + CE^2$ $\Rightarrow$ $AE = 3$ cm

От метрични зависимости в правоъгълен триъгълник следва, че $CF.AE = AC.CE$ $\Rightarrow$ $CF = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $\triangle AMN$ е правоъгълен.	5 точки
$S_{\triangle AMN} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}\ \text{cm}^2$	4 точки
б) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}$	6 точки